

Rechnen mit Dualzahlen

1. Addition und Subtraktion von Dualzahlen

Rechenregeln:

Addition	Subtraktion
$0+0=(0)0$	$1-0=(0)1$
$0+1=(0)1$	$1-1=(0)0$
$1+0=(0)1$	$0-0=(0)0$
$1+1=(1)0$	$0-1=(1)1$

Beispiel:

$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ +\quad 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 2 \\ +\ 1\ 3 \\ \hline 3\ 5 \\ \hline \end{array}$		
$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ -\quad 1\ 0\ 1\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 3 \\ -\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ -\quad 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 2\ 0 \\ -\quad 1\ 3 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$

Aufgabe: Löse die folgenden Aufgaben!

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ \hline 110101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ +\quad 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 111011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1101000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\quad 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 11110111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ -\quad 1\ 1\ 1\ 0 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ -\quad 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 11111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline 11001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ -\quad 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1000000 \end{array}$$

2. Darstellung negativer Zahlen

- Idee:

Fest vorgegebene Länge von n Bit um eine ganze Zahlen darzustellen und davon 1 Bit für das Vorzeichen.

Dabei gilt immer: Vorzeichenbit = 0 $\Rightarrow$ positive Zahl

Vorzeichenbit = 1 $\Rightarrow$ negative Zahl

Bsp.: 1Bit Vorzeichen + 7Bit Betrag

- 1-Komplement:

Bildung: Alle Bit invertieren.

Beispiel: $z = 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \hat{=} 86$ als 8-Bit-Dualzahl

$\hat{z} = 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \hat{=} -86$ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement

$z = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \hat{=} 0$ als 8-Bit-Dualzahl

$\hat{z} = 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \hat{=} -0$ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement

$\Rightarrow$ positive und negative Null

Zahlenbereich: n Bit $\Rightarrow 2^n$ verschiedene Zahlen

1 Vorzeichenbit $\Rightarrow n-1$ Bit für die Beträge $\Rightarrow 0 \dots 2^{n-1} - 1$ als Betrag

$\Rightarrow$ Die Zahlen $-2^{n-1} + 1$ bis $2^{n-1} - 1$ sind darstellbar

Bsp.: 8Bit $\Rightarrow -2^7 + 1 = -127$ bis $2^7 - 1 = 127$

Problem: Bei Addition und Subtraktion entstehen oft Fehler!!!

Aufgabe: Stelle folgende Zahlen als 8-Bit-Dualzahlen im 1-Komplement dar!

$$22 \hat{=} 0001\ 0110$$

$$-22 \hat{=} 1110\ 1001$$

$$72 \hat{=} 0100\ 1000$$

$$-72 \hat{=} 1011\ 0111$$

$$41 \hat{=} 0010\ 1001$$

$$-41 \hat{=} 1101\ 0110$$

$$84 \hat{=} 0101\ 0100$$

$$-84 \hat{=} 1010\ 1011$$

$$57 \hat{=} 0011\ 1001$$

$$-57 \hat{=} 1100\ 0110$$

$$102 \hat{=} 0110\ 0110$$

$$-102 \hat{=} 1001\ 1001$$

- 2-Komplement:

Bildung: Alle Bit invertieren. Danach 1 addieren.
Überträge ins $n+1$ te Bit werden ignoriert.

Beispiel:

$$z = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \hat{=} 86 \text{ als 8-Bit-Dualzahl}$$

$$\hat{z} = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \hat{=} -86 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement}$$

$$\tilde{z} = 1 \ 0 \Rightarrow 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \hat{=} -86 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 2-Komplement}$$

$$z = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \hat{=} 0 \text{ als 8-Bit-Dualzahl}$$

$$\hat{z} = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \hat{=} 0 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 1-Komplement}$$

$$\tilde{z} = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \hat{=} 0 \text{ als 8-Bit-Dualzahl im 2-Komplement}$$

Zahlenbereich: n Bit $\Rightarrow 2^n$ verschiedene Zahlen
1 Vorzeichenbit $\Rightarrow n-1$ Bit für die Beträge $\Rightarrow 0 \dots 2^{n-1} - 1$ als Betrag
nur einfache Null $\Rightarrow 1$ weitere Zahl darstellbar

$\Rightarrow$ Die Zahlen -2^{n-1} bis $2^{n-1} - 1$ sind darstellbar

Bsp.: 8Bit $\Rightarrow -2^7 = -128$ bis $2^7 - 1 = 127$

Rechnen: Addition analog zu Addition von positiven Dualzahlen (siehe oben).
Subtraktion erfolgt durch addieren der negativen Zahl.
Überträge in das $n+1$ te Bit werden ignoriert.

Beispiel:

3 6	3 6	0 0 1 0 0 1 0 0
- 4 8	+ (- 4 8)	+ 1 1 0 1 0 0 0 0
- 4 8	(- 1 2)	1 1 1 1 0 1 0 0
	(- 1 2)	1 1 1 1 0 1 0 0

Aufgabe: Stelle folgende Zahlen als 8-Bit-Dualzahlen im 2-Komplement dar!
Überprüfe die Ergebnisse!

-22; -57; 73; -73; -84; 118; -118; 128; -128

1110 1010; 1100 0111; 1011 0111; 1010 1100; 0111 0110; 1000 1010; nicht darstellbar; 1000 0000

Aufgabe: Löse folgende Rechnungen mit 8-Bit-Dualzahlen im 2-Komplement!
Überprüfe die Ergebnisse!

$\begin{array}{r} +32 \quad 0010 \ 0000 \\ +15 \quad 0000 \ 1111 \\ \hline 47 \quad 0010 \ 1111 \end{array}$	$\begin{array}{r} +32 \quad 0010 \ 0000 \\ -15 \quad 1111 \ 0001 \\ \hline 17 \quad 0001 \ 0001 \end{array}$
--	--

$\begin{array}{r} -32 \quad 1110 \ 0000 \\ +15 \quad 0000 \ 1111 \\ \hline -17 \quad 1110 \ 1111 \end{array}$	$\begin{array}{r} -32 \quad 1110 \ 0000 \\ -15 \quad 1111 \ 0001 \\ \hline -47 \quad 1101 \ 0001 \end{array}$
---	---